Programme de colle n°8

semaine du 16 au 20 novembre

Notions vues en cours

Chapitre 10 – Ensembles

- Ensembles usuels : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, ensemble vide (noté $\varnothing$), intervalles de $\mathbb{R}$, ensembles $[\![a,b]\!]$ avec $a,b \in \mathbb{Z}$.
- Notations $\{x \in E \mid P(x)\}$ et $\{f(x) \mid x \in E\}$, **caractérisations qu'un élément appartienne à un de ces ensembles**
- Couple, n-uplet, produit cartésien d'ensembles, notations $E \times F$ et E^n
- Partie (ou sous-ensemble) d'un ensemble, **caractérisations de l'inclusion et de l'égalité d'ensembles**, raisonnement par double inclusion
- Singleton, ensemble fini ou infini ; ensemble des parties d'un ensemble E, noté $\mathscr{P}(E)$
- Opérations sur les ensembles : $\cup$, $\cap$, $\setminus$, passage au complémentaire. Propriétés élémentaires de ces opérations
- Ensembles disjoints, ensembles disjoints deux à deux, partition d'un ensemble (les sous-ensembles d'une partition doivent être non vides)
- Union et intersection d'un nombre infini d'ensembles (on se limite au cas dénombrable), notations $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, caractérisations de $x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ et $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$
- Une assertion de la forme "$\forall x \in \varnothing \quad \ldots$" est toujours vraie. Une assertion de la forme "$\exists x \in \varnothing \quad \ldots$" est toujours fausse.

Chapitre 11 – Applications

- Vocabulaire sur les applications : définition intuitive, ensembles de départ et d'arrivée, image d'un élément, antécédent d'un élément, application bien définie
- Étant donné une expression $f(x)$, la fonction $f : x \mapsto f(x)$ représente une application de D_f dans $\mathbb{R}$, où D_f est l'ensemble de définition de f (ensemble des valeurs x telles que $f(x)$ a un sens)
- Graphe d'une application, cas particulier des fonctions réelles
- Exemples d'applications : fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$, application identité id_E
- Image directe / réciproque d'un ensemble par une application : définition, notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$, **caractérisations $y \in f(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$**, propriétés en lien avec $\subset$, $\cup$ et $\cap$

La notion de "partie stable par f" sera vue ultérieurement dans l'année, elle doit être redéfinie dans les exercices et il n'est pas attendu que les étudiants en aient une maitrise approfondie.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres **8 à 10**).

Les questions flash sont en page suivante

Questions de Cours.

Exporter (LaTeX)

Q1 Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ et $B, B' \in \mathscr{P}(F)$. Compléter et démontrer les assertions suivantes :

- $f(A \cup A') \ldots\ldots f(A) \cup f(A')$
- $f^{-1}(B \cap B') \ldots\ldots f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

Chapitre 11, Théorème 11.10 (en partie)

Exporter (LaTeX)

Q2 Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ et $B, B' \in \mathscr{P}(F)$. Montrer les assertions suivantes :

- $f(A \cap A') \ldots\ldots f(A) \cap f(A')$
- $f^{-1}(B \cup B') \ldots\ldots f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Chapitre 11, Théorème 11.10 (en partie)

Exporter (LaTeX)

Q3 On pose $E = \left\{ \dfrac{1+ix}{1-ix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$. Montrer que $\mathbb{U} \setminus \{-1\} \subset E$.

Chapitre 10, Exercice 10.13 (une inclusion suffit)

Chapitre 10 – Ensembles

- Compléter : $\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \ldots \right\}$ et donner une autre écriture de $\mathbb{U}$ sous forme paramétrée.
- Donner tous les éléments de $E \times F$ avec $E = \{1,2\}$ et $F = \{3,4\}$.
- Donner tous les éléments de $[\![-3,2]\!]$.
- Compléter la caractérisation : $y \in \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in E \right\} \iff \ldots$
- Compléter la caractérisation : $E \subset F \iff \ldots$
- Compléter la caractérisation : $E = F \iff \ldots$
- Que signifie $A \in \mathscr{P}(E)$?
- Compléter les caractérisations : $x \in A \cap B \iff \ldots$ et $x \in A \cup B \iff \ldots$
- Compléter les formules suivantes : $\overline{A \cap B} = \ldots$ et $\overline{A \cup B} = \ldots$
- Sous quelle condition est-ce que des ensembles $A_1, \cdots, A_n$ sont-ils disjoints deux à deux ?
- Compléter : les ensembles $A_1, \cdots, A_n$ forment une partition de E si $A_1, \cdots, A_n$ sont ..... , disjoints deux à deux et si .....

Chapitre 9 – Équations différentielles

- Quelle formule donne toutes les solutions de $y' + a(x)y = 0$?
- Quelle est l'équation homogène E_H associée à $E : y' + a(x)y = b(x)$? Comment obtient-on toutes les solutions de E une fois qu'on a obtenu une solution générale de E_H ?
- Une solution générale de $y' + a(x)y = 0$ est donnée par $y_H(x) = Ce^{-A(x)}$. Expliquer le principe de la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière.
- Qu'appelle-t-on l'équation caractéristique de $ay'' + by' + cy = d(x)$?
- Quelle est la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque $a,b,c \in \mathbb{R}$ et que l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 ?
- Quelle est la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque $a,b,c \in \mathbb{R}$ et que l'équation caractéristique admet une racine double r_0 ?
- Quelle est la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque $a,b,c \in \mathbb{R}$ et que l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$?
- On cherche une solution particulière de $ay'' + by' + cy = e^{qx}$. Quelle est la forme à poser si q est racine simple de l'équation caractéristique ?
- Idem si q est racine double.
- Idem si q n'est pas une racine.
- On cherche une solution particulière de $y'' + y' + y = x^2$. Quelle est la forme à poser ?

Chapitre 8 – Primitives et intégrales

- Donner une primitive de $\dfrac{u'}{u}$. En déduire une primitive de $\dfrac{1}{x} \times \dfrac{1}{\ln x}$.
- Donner une primitive de $u'u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\operatorname{sh} x \times \dfrac{1}{\operatorname{ch}^n x}$.
- Donner une primitive de $u'u^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$. En déduire une primitive de $\cos x \sqrt{\sin x}$.
- Donner une primitive de $u'(ax+b)$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$. En déduire une primitive de $\tan(2x+3)$.
- Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, quelles sont toutes les primitives de f sur I ?

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Donner la définition d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
- Soit $a \geqslant 0$. Que peut-on dire de $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ si f est impaire ? et si f est paire ?

Annexe : code LaTeX des exercices à copier-coller

Retour en arrière

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
Soit $f:E\to F$ une application. Soit $A,A^{\prime }\in

t (E)$ et $B,B^{\prime }\in

t (F)$. Compléter et démontrer les assertions suivantes :
\begin{itemize}
\item$f(A\cup A^{\prime })\ldots\ldots f(A)\cup f(A^{\prime })$
\item$\ffleche f(B\cap B^{\prime })\ldots\ldots\ffleche f(B)\cap\ffleche f(B^{\prime })$
\end{itemize}
```

Retour en arrière

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
Soit $f:E\to F$ une application. Soit $A,A^{\prime }\in

t (E)$ et $B,B^{\prime }\in

t (F)$. Montrer les assertions suivantes :
\begin{itemize}
\item$f(A\cap A^{\prime })\ldots\ldots f(A)\cap f(A^{\prime })$
\item$\ffleche f(B\cup B^{\prime })\ldots\ldots\ffleche f(B)\cup\ffleche f(B^{\prime })$
\end{itemize}
```

Retour en arrière

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
On pose $E=\set{\frac{1+\i x}{1-\i x}}{x\in\mathbb{R}}$. Montrer que
    $\mathbb{U}\setminus\{-1\}\subset E$.
```